

自锚式悬索桥挠度理论基础微分方程近似推导

石磊 张哲 刘春城

(大连理工大学土木水利学院, 大连, 116024)

摘要: 基于大位移非线性弹性理论的广义变分原理, 考虑了加劲梁轴向压缩应变能的影响, 建立了三跨自锚式悬索桥挠度理论下的大位移不完全广义势能泛函, 通过约束变分导出了自锚式悬索桥挠度理论下的基础微分方程, 得出了自锚式悬索桥挠度理论的基础微分方程近似于弹性理论下的微分方程这一结论. 为阐述自锚式悬索桥静力行为提供了理论依据。

关键词: 自锚式悬索桥, 挠度理论, 泛函, 广义变分

1 引言

悬索桥在静荷载下的结构行为是决定悬索桥结构设计的主要依据, 所以, 关于静力分析理论和方法的研究, 就成了悬索桥理论中最重要和最基本的部分。自从 1823 年法国的 navier 发表无加劲梁悬索桥计算理论以来^[1], 地锚式悬索桥的解析理论研究已经日臻完善, 并有大量的研究文献资料。但有关自锚式悬索桥的研究资料确不多见, 自锚式悬索桥的解析理论虽然很类似于地锚式悬索桥, 但是由于其主缆锚固在梁端, 加劲梁承受巨大的主缆传来的轴向压力这一结构受力特点, 使其解析理论的形似也略区别与地锚式体系。近年来自锚式悬索桥以其优美的外形和错落有致的外观而越来越受到青睐, 因此对自锚式悬索桥的具体细致的研究也越来越显得尤为重要。混凝土自锚式悬索桥在国内尚无一例, 对此全面系统地研究也非常少。本文在地锚式悬索桥挠度理论的基础上^[2], 考虑加劲梁的轴向压缩应变能的影响, 建立了大位移不完全广义势能泛函^[3], 得到自锚式悬索桥体系的基础微分方程, 为阐述自锚式悬索桥静力行为提供了理论依据。

2 大位移不完全广义势能泛函的建立

以图 1 所示三跨自锚式悬索桥为例, 根据自锚式悬索桥的结构特点, 引入如下假定^[2]:

- 所有的材料符合虎克定律。
- 成桥状态下, 恒载沿跨度均匀分布, 缆索为抛物线线型。
- 加劲梁为两端支撑的等截面连续梁, 不考虑加劲梁的竖曲线, 恒载下加劲梁为无应力状态。
- 吊杆是稠密的, 可以比拟为仅在竖向有抗力的均匀膜, 不计吊杆的拉伸和倾斜。
- 不考虑塔的顺桥向抗弯刚度及轴向压缩变形, 横桥向刚度为无穷大。
- 不考虑缆索的纵向水平位移。

仅在上述假定的条件下, 对于图 1 所示的坐标系统, 恒载状态缆索的方程为:

$$y = \frac{4f}{L^2} x(L-x) \quad (1)$$

式中, f 为缆索垂度, L 为缆索跨长。设 θ 为缆索的倾角, 则:

$$\operatorname{tg} \theta = y' = \frac{4f}{L^2} (L-2x) \quad (2)$$

$$\text{而} \quad y'' = -\frac{8f}{L^2} \quad (3)$$

取主缆一微段为自由体,如图2所示,在恒载作用下,根据平衡条件 $\sum y = 0$ 得

$$H_q \frac{dy_1}{dx} - H_q \frac{dy_2}{dx} = -q dx$$

因为 $dy_1 - dy_2 = d^2 y$ 所以 $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{q}{H_q}$ (4)

式中, H_q 为恒载引起的缆索力的水平分量, q 为沿跨向的恒载集度。

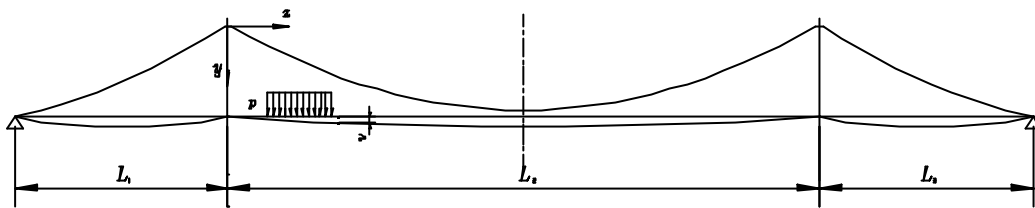


图1 自锚式悬索桥总体变形

Fig1. General deformation of Self-Anchored suspension

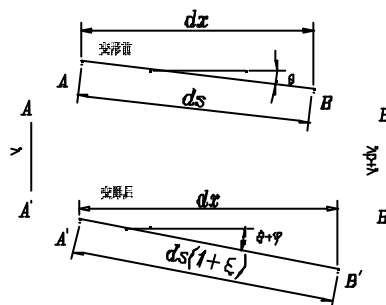


图2 缆索微单元变形

Fig2. Finite element deformation of cable

当加劲梁上作用有分布活载 $p(x)$ 时,用以下符合定义悬索桥各部分的位移和应变:

v ——缆索和加劲梁的竖向位移;

ϵ_c ——由于活载引起的缆索应变变量;

ϵ_l ——由于活载引起的加劲梁应变变量;

则相关的能量项是:加劲梁的弯曲应变能和轴向压缩应变能、缆索的拉伸应变能、及恒载势能和活载势能。忽略加劲梁的剪切应变能,则总势能为:

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \int_0^k Mdkdx + \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \int_{e_{L0}}^{e_{L0}+e_L} Nde_L dx + \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \int_{e_{c0}}^{e_{c0}+e_c} Tde_c dx - \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \int_0^v qdvdx \\ & - \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \int_0^v pdvdx \end{aligned} \quad (5)$$

式中, ε_{c0} 和 ε_{L0} 分别为缆索及加劲梁在恒载状态下的初始应变; M 为加劲梁的弯矩; $\kappa=M/EI$ 为加劲梁的曲率; EI 为加劲梁挠曲刚度; T 为恒载加活载作用下的缆索轴向拉力。此式体现了悬索桥施加活载 p 后总势能的一般构成。

为了利用大位移不完全广义势能变分原理导出自锚式悬索桥的基础微分方程, 需要由 Lagrange 乘子法建立不完全广义势能泛函。那么首先建立应变位移协调条件。由图的几何关系可知, 对于缆索有:

$$\begin{aligned} ds \cos q &= dx \\ (1+e_c)ds \cos(q+j) &= ds \cos q \\ (1+e_c)ds \sin(q+j) &= ds \sin q + dv \end{aligned} \quad (6)$$

式中, $(\theta + \phi)$ 为变形后的缆索倾角, ϕ 为缆索倾角的变化量。由此三式消 ϕ 和微单元长度 ds 可得:

$$e_c = \sqrt{\cos^2 q + (\sin q + v' \cos q)^2} - 1 \quad (7)$$

对加劲梁, 若忽略其剪切变形有^[4]:

$$e_L = u' - y_L v'' + \frac{1}{2} v'^2 \quad (8)$$

其中, y_L 表示加劲梁的纵坐标, u 为加劲梁的纵向位移。则式 (7)、(8) 分别为关于缆索和加劲梁的应变位移协调条件。

现在令:

$$G_c = \sqrt{\cos^2 q + (\sin q + v' \cos q)^2} - (e_c + 1) = 0 \quad (9)$$

$$G_l = u' - y_L v'' + \frac{1}{2} v'^2 - e_L = 0 \quad (10)$$

则大位移不完全广义势能泛函为:

$$\Pi^* = \Pi + \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} l_c G_c dx - \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} l_L G_L dx = \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} F^* dx \quad (11)$$

式中, Π 由式 (5) 给出, l_c, l_L 为 Lagrange 乘子。

由式 (11), 泛函 Π^* 的被积函数 F^* 的表达式为:

$$F^* = \int_0^k Mdk + \int_{e_{L0}}^{e_{L0}+e_L} Nde_L + \int_{e_{c0}}^{e_{c0}+e_c} Tde_c - \int_0^v qdv - \int_0^v pdv + l_c G_c + l_L G_L \quad (12)$$

式 (11~12) 中, 与缆索应变能有关的项使用了式 (6) 变换积分变量和积分限。

根据大位移不完全广义势能变分原理,取 Π^* 的变分 $d\Pi^* = 0$ 则得到关于 F^* 的如下欧拉方程:

$$d\Pi^* = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial v} - \left(\frac{\partial F^*}{\partial v'} \right)' + \left(\frac{\partial F^*}{\partial v''} \right)'' - \dots = 0 \quad (13a)$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial e_c} - \left(\frac{\partial F^*}{\partial e_c'} \right)' + \left(\frac{\partial F^*}{\partial e_c''} \right)'' - \dots = 0 \quad (13b)$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial e_L} - \left(\frac{\partial F^*}{\partial e_L'} \right)' + \left(\frac{\partial F^*}{\partial e_L''} \right)'' - \dots = 0 \quad (13c)$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial u} - \left(\frac{\partial F^*}{\partial u'} \right)' + \left(\frac{\partial F^*}{\partial u''} \right)'' - \dots = 0 \quad (13d)$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial l_c} = 0 \quad (13e)$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial l_L} = 0 \quad (13f)$$

前 4 个方程给出平衡微分方程,后 2 个为应变位移协调条件。将式(12)代入前 6 式,可得平衡方程的具体形式为:

$$M'' - q - p - \frac{d}{dx} \left[\frac{l_c (\sin q + v' \cos q) \cos q}{\sqrt{\cos^2 q + (\sin q + v' \cos q)^2}} + l_L v' \right] + \frac{d^2}{dx^2} (l_L y_L) = 0 \quad (14a)$$

$$T \sec q - l_c = 0 \quad (14b)$$

$$N - l_L = 0 \quad (14c)$$

$$\frac{d}{dx} (l_L) = 0 \quad (14d)$$

从上式中消去 l_c, l_L , 并利用式 (6), 可以简化为如下平衡方程中:

$$M'' - q - p - \frac{d}{dx} [T \sin(q + j) + N v'] + \frac{d^2}{dx^2} (N y_L) = 0 \quad (15)$$

由于上述的假定与古典挠度理论所采用的假定完全相同,因此应该得出类似的结论。事实上,设 $H = T \cos(q + j)$, 而 $H = -N$, 则式 (15) 可作如下变换:

$$M'' - q - p - \frac{d}{dx} [Htg(q+j) - Hv'] - \frac{d^2}{dx^2} (Hy_L) = 0 \quad (16)$$

利用式(6),则上式变换成:

$$M'' - q - p - H \frac{d}{dx} [y' + v' - v'] - Hy_L'' = 0 \quad (17)$$

在由式(4)和(8)得到: $q = -Hy''$, $H = H_p + H_q$ (这里 H_p 为活载引起的水平力增量),

由于引入吊杆保持竖直不变的假定,将导致缆索拉力水平分量而沿跨为常量,而 y_L'' 可以认为是0。则式(17)变换为:

$$M'' - p - H_p y'' = 0 \quad (18)$$

上式就是自锚式悬索桥挠度理论的平衡微分方程,从方程上我们可以看出它和地锚式悬索桥弹性理论方程是一样的。

我们可以看看这个方程的物理意义: 弹性理论给出加劲梁中任一点的弯矩

$$M = M' - H_p y \quad (19)$$

这里 M' = 简支梁的活载弯矩; 由式可知加劲梁中的活载弯矩将由于主缆中由活载产生的水平力作用而减小。因此,弹性理论没有考虑由于活载作用主梁变形情况下主缆中由于活载和恒载共同作用产生的水平力而使主梁弯矩的减小效果。挠度理论考虑了主缆的作用,通过减去 $(H_p + H_q)v$ 项来减小主梁弯矩。因此挠度理论是在弹性理论基础上的发展,可以

写成
$$M = M' - hy - (H_p + H_q)v \quad (20)$$

通过计入主缆影响,挠度理论降低了主梁的强度要求,比弹性理论要经济的多。考虑自锚式悬索桥主梁中存在巨大的轴向力需要采用传统的悬索桥分析理论,因为主梁要承担缆索的全部水平力,主梁中的轴向力为 $(H_p + H_q)$ 。如果假设主梁最初是水平的,那么有挠度 v , 轴向力将产生附加的弯矩 $(H_p + H_q)v$ 。把这一项加到挠度理论的(20)式中,得出(19)式,即等同于弹性理论。在对式(19)求导二次,即得出挠度理论微分方程(18)。由于式(18)中有 H_p 和 v 两个未知数,所以需要有一个协调条件能基于边值定解,地锚式悬索桥挠度理论采用的协调条件是缆索相容方程,但是自锚式悬索桥略有不同,具体形式如下:

$$\sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{H_p}{E_c A_c} \int_0^{L_i} \frac{dx}{\cos^3 q} + at \int_0^{L_i} \frac{dx}{\cos^3 q} - \int_0^{L_i} y' v' dx - \frac{(H_p + H_q)L_i}{EA} \right\} = 0 \quad (21)$$

式中, $E_c A_c$ 、 $E_L A_L$ 分别为缆索和加劲梁的弹性模量和截面积, a 为线胀系数、 t 为温度变化。

4 结 论

从基础微分方程可以看出: 自锚式悬索桥的挠度理论方程可以近似等同于弹性理论方程,是一种线性的方程,也就是说相对于地锚式悬索桥来说,自锚式更适合于用弹性理论进

行分析。由于主缆传递给加劲梁的巨大轴向力所产生的附加弯矩抵消了加劲梁由于活载挠度引起的弯矩值,所以用弹性理论对自锚式悬索桥初步分析是适合的。上述结论的得出为用弹性理论对自锚式悬索桥进行初步设计分析提供了理论依据。

参 考 文 献

- [1] Pugsley A: The theory of suspension bridges, 2nd. Ed., 1968.
- [2] 陈仁福, 大跨度悬索桥理论。成都: 西南交通大学出版社, 1994。
Chen Ren-fu, Theory of long-span suspension bridge. Chengdu, Xi nan Transportation university, 1994.
- [3] 钱伟长著, 变分法及有限元。北京: 科学出版社, 1980。
Qian Wei-chang. Variational and finite element method, Beijing: science press, 1980.
- [4] R.D.Cook, Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley, 1974.

The Basic Differential Equation Deductive of the Self-anchored Suspension Bridge

SHI Lei, ZHANG Zhe, LIU Chun-cheng

(Institute of Civil & Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology,
Dalian, 116024)

Abstract: Based on the generalized potential energy variational principal of nonlinear elasticity theory with large deflection, the incomplete generalized potential energy function with large deflection is established based on the flexibility theory of three-span self-anchored suspension bridge by considering the effect of axial compressive energy of stiffening girder. By constraint variation, the differential equations under flexibility theory is closed to the elastic theory vibration have been derived. It can provide theoretical basis for the static analysis of self-anchored suspension bridge.

Keywords: Self-Anchored suspension bridge, flexibility theory, functional, generalized variation

《CIMS 论文的天地》声明

本站免费向大家提供论文全文, 本站论文除了特别说明的以外都是从作者手中征集得到的。如果您有论文希望上网, 本站可以免费提供论文全文的上网服务。

目前网上论文网站较多, 有人非法转载本站论文, 在此提出警告, 本站将对这类行为进行追究。

本站镜像:

- 1、上海付费空间镜像: <http://www.cimspaper.com> <主站, 推荐访问>
- 2、教育网内的镜像: <http://xcchen.yeah.net>
- 3、山东泰安网页吧镜像: <http://cimspaper.wy8.net>
- 4、北京虎翼网镜像: <http://cimspaper.51.net>