

结构可靠性分析的区间方法*

王登刚, 李杰

(同济大学 建筑工程系, 上海, 200092)

摘 要: 工程中的不确定性可以分别用随机方法, 模糊方法和区间方法来建模。本文采用区间数描述具有不确定性的结构参数, 基于区间数学知识, 建立了一种新的可靠度量体系和分析方法。当没有足够的实验数据获得结构参数的概率密度函数(或隶属度函数)时, 这种方法比基于概率论(或模糊数学)的可靠度分析方法更为适用。为了克服直接采用区间计算法则计算结构功能区间函数时计算结果易于扩张的问题, 把结构功能函数的计算转化为求解两个优化问题分别确定功能函数的上下限值, 并采用一种具有全局寻优能力的智能性算法—实数编码遗传算法—来进行求解。算例对本文方法的可行性和有效性进行了验证。

关键词: 结构可靠性; 区间分析; 区间数学; 遗传算法; 非概率的
中图分类号:

1 引言

基于概率的可靠性分析方法近年来受到了足够的重视, 具有其优点, 同时, 它又有着一些应用方面的不足^[1-3]。例如, 结构概率可靠性对统计参数的变化和分布概型的选择可能很敏感, 需要较多的数据来准确确定随机变量的统计参数(如平均值, 方差)和随机变量的分布概型, 而在很多工程情况下可得到的数据是有限的。类似的, 模糊可靠性分析方法也需要足够的数据来确定相关结构参数的隶属度函数, 也存在这样的问题。为了避免这些弊病和不足, 基于灰色系统理论的可靠性分析方法^[2-3]和基于区间描述的非概率可靠性分析方法^[4-7]逐步受到一些学者的重视。

注意到在很多实际情况下, 尽管不易得到不确定量的准确概率分布或隶属度函数, 但是非确定量的幅度或界限相对来说易于确定, 文献[4-7]从该角度出发对可靠性分析的区间方法进行了研究。文献[4]基于凸集理论提出了非概率可靠性的概念。文献[5]在针对此概念的讨论中提出一种可能的度量方法。文献[6]提出以系统能容许的不确定性的最大程度度量可靠性。文献[4-6]倡导使用不确定性的凸集模型, 认为宜采用集合模型描述掌握的信息量较少的非确定性。而文献[7]则基于区间算法, 提出非概率可靠性的一种新的度量方法。但是文献[7]仅对于结构设计情况给出了可靠度的定义形式, 并且无法避免由于区间数运算法则的定义引起的区间计算结果易于扩张的问题, 如何正确计算还有待于进一步研究。

本文采用区间数描述具有不确定性的结构参数, 基于数学上的区间分析内容, 利用区间数运算法则和区间不等式的概念, 给出一种与文献[7]大致相同的可靠度定义形式, 并提出避免区间计算结果扩张的计算方法, 最后给出了实例计算。

2 区间数学相关知识简介

对于区间数 $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$, $\bar{x} \geq \underline{x}$, 当 $\bar{x} = \underline{x} = x$ 时, $[x] = x$, 区间数 $[x]$ 退化为普通数 x 。区间数 $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$, 还可以记为形如 $[x] = [m([x]); rad([x])]$ 的中心区间的形式。其中

*本研究得到国家杰出青年基金(59825105)和国家自然科学基金(10072014)资助。

$m([x]) = (\underline{x} + \bar{x})/2$ 为区间中点, $rad([x]) = (\bar{x} - \underline{x})/2$ 为区间半径。

对于两个区间数 $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$ 和 $[y] = [\underline{y}, \bar{y}]$, $[x], [y] \in I(R)$, $I(R)$ 是所有有界闭区间的集合, 四则运算规定为: $[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$, $[x] - [y] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]$, $[x] \cdot [y] = [\min(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}), \max(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y})]$, $[x]/[y] = [\underline{x}, \bar{x}] \cdot [1/\bar{y}, 1/\underline{y}]$ (若 $0 \notin [y]$)。这种四则运算定义下, 对任意区间数 $[x], [y], [z] \in I(R)$, 加法交换律 $[x] + ([y] + [z]) = ([x] + [y]) + [z]$ 、乘法交换律 $[x] \cdot ([y] \cdot [z]) = ([x] \cdot [y]) \cdot [z]$ 成立, 但是乘法对加法的分配律不成立, 即 $[x] \cdot ([y] + [z]) \neq [x] \cdot [y] + [x] \cdot [z]$, 其次区间数减法并不是区间数加法的逆运算, 甚至 $[x] - [x] \neq 0$ 。

若 $\bar{x} \leq \underline{y}$ 则称 $[x] \leq [y]$, 若 $\bar{x} < \underline{y}$ 则称 $[x] < [y]$ 。 $[x] \subset [y]$ 指 $\underline{y} \leq \underline{x} \leq \bar{x} \leq \bar{y}$ 。在上述四则运算定义下乘法对加法的次分配律 $[x] \cdot ([y] + [z]) \subset ([x] \cdot [y]) + ([x] \cdot [z])$ 成立。

$$\text{两区间数之交定义为 } [x] \cap [y] = \begin{cases} \Phi & [x] < [y] \text{ 或 } [x] > [y] \\ [\max(\underline{x}, \underline{y}), \min(\bar{x}, \bar{y})] & \text{其他} \end{cases}。$$

区间函数可以看作是一般函数的扩展, 区间计算还要用到区间扩展的概念^[8]。

3 基于区间分析的可靠性度量

3.1 基于区间分析的可靠度指标定义

对功能函数 $M = R - S = g(x)$ 进行区间扩展, 可以得到采用区间数描述具有不确定性结构参数的结构的功能函数 $[M] = [\underline{M}, \bar{M}] = g([x]) = [R] - [S] = g([x_1], [x_2], \dots, [x_n])$ 对结构失效准则进行描述, 其中 $x_i \in I(R)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。作为计算结果的功能函数值也是一个区间数, 在区间数不等式的定义下, 当 $[M] = g([x]) > 0$, 即 $[R] > [S]$, 结构可靠; 当 $[M] = g([x]) < 0$, 即 $[R] < [S]$, 结构失效; 当 $[M] = g([x]) > 0$ 和 $[M] = g([x]) < 0$ 都不成立时, 结构处于既可能安全也可能失效的工作状态。通过分析可以发现, 对于区间量 $[x]$, 其区间中点 $m([x])$ 与区间半径 $rad([x])$ 的比值 $m([x])/rad([x])$ 可以描述结构的这种状态。与文献^[7]类似, 本文定义结构可靠度指标为

$$h = m([M])/rad([M]) = m(g([x]))/rad(g([x])) \quad (1)$$

可以发现 $[M] = g([x]) > 0$ 与 $h > 1$ 相对应; $[M] = g([x]) < 0$ 与 $h < -1$ 相对应; $[M] = g([x]) > 0$ 和 $[M] = g([x]) < 0$ 都不成立时 (即区间变量 $[R] \cap [S] \neq \Phi$), 与 $-1 < h < 1$ 相对应。两个临界状态分别为 $h = 1$ 对应 $\underline{M} = 0$; $h = -1$ 对应 $\bar{M} = 0$ 。它们具有相应的实际物理意义。进行结构设计时一般应该满足 $h > 1$, 既有结构、损伤结构可能存在于 $h < 1$ 的情况, 此时需要根据需要确定是否对其进行加固维修。

3.2 均匀分布时的区间可靠性和概率可靠性分析

区间可靠性与概率可靠性、模糊可靠性也是有一定的内在关系的。例如, 当信息量增加, 还能获得不确定量在给定区间内的概率分布关系时, 依然可以进一步采用概率可靠性分析方法进行更为细致的分析。例如, 若结构参数在所给定区间上均匀分布, 则结构效应 $S \in [S] = [\underline{S}, \bar{S}]$ 和抗力 $R \in [R] = [\underline{R}, \bar{R}]$ 也将服从均匀分布, 此时结构可靠性概率 $r = P(r > s | r \in R, s \in S)$ 与区间可靠度如下所示。

3.2.1 当 $[R] \cap [S] = \Phi$ 时, 有以下两种情况

(1) 当 $[R] > [S]$, 即 $\underline{S} < \bar{S} < \underline{R} < \bar{R}$ 。

$$r = P(R > S | R \in [R], S \in [S]) = 1; m([M]) > rad([M]) > 0, h > 1。$$

(2) 当 $[R] < [S]$, 即 $\underline{R} < \bar{R} < \underline{S} < \bar{S}$ 。

$$r = P(R > S | R \in [R], S \in [S]) = 0; -m([M]) > rad([M]) > 0, h < -1。$$

3.2.2 当 $[R] \cap [S] \neq \Phi$ 时, 有以下四种情况

(1) 当 $[R] \cap [S] = [S]$, 即 $\underline{R} < \underline{S} < \bar{S} < \bar{R}$ 。

$$r = P(R > S | R \in [R], S \in [S]) = \frac{\bar{R} - \bar{S}}{\bar{R} - \underline{R}} + \frac{\bar{S} - \underline{S}}{2(\bar{R} - \underline{R})}; 0 < r < 1, -1 < h < 1。$$

(2) 当 $[R] \cap [S] = [R]$, 即 $\underline{S} < \underline{R} < \bar{R} < \bar{S}$ 。

$$r = P(R > S | R \in [R], S \in [S]) = \frac{\bar{R} - \underline{S}}{\bar{S} - \underline{S}} + \frac{\bar{R} - \underline{R}}{2(\bar{S} - \underline{S})}; 0 < r < 1, -1 < h < 1。$$

(3) 当 $\underline{R} < \underline{S} < \bar{R} < \bar{S}$ 。

$$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{R} - \underline{S}}{\bar{S} - \underline{S}} \cdot \frac{\bar{R} - \underline{S}}{\bar{R} - \underline{R}}; 0 < r < 1, -1 < h < 1。$$

(4) 当 $\underline{S} < \underline{R} < \bar{S} < \bar{R}$ 。

$$r = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{S} - \underline{R}}{\bar{R} - \underline{R}} \cdot \frac{\bar{S} - \underline{R}}{\bar{S} - \underline{S}}; 0 < r < 1, -1 < h < 1。$$

特别地, 当 $[R] \cap [S] = [R] = [S]$ (即 $\bar{S} = \bar{R} > \underline{S} = \underline{R}$) 时, $r = 0.5; m([M]) = 0, h = 0$ 。

可见, 本文的区间可靠性定义与概率可靠性不是排斥的, 在可靠性判定上具有一致性。在某种程度上说, 区间可靠度方法或许可以看作是概率可靠性方法在实际应用上信息量不足时的有益补充。

4 区间功能函数的计算

计算结果易于扩张是区间计算的一大缺陷。同一函数由于计算次序不同, 将得到不同的区间扩展, 从而可能得到不同的计算结果。例如, 函数 $f(x) = (x_1 + x_2)/(x_1 - 1)$, $x_1 \in [x_1] = [2, 5]$, $x_2 \in [x_2] = [-1, 1]$, 直接计算有 $f([x]) = ([x_1] + [x_2])/([x_1] - 1) = ([2, 5] + [-1, 1])/([2, 5] - 1) = [1, 6]/[1, 4] = [1/4, 6]$ 。而改写成 $f(x) = 1 + (x_2 + 1)/(x_1 - 1)$, 则有 $f([x]) = 1 + ([x_2] + 1)/([x_1] - 1) = 1 + [0, 2]/[1, 4] = 1 + [0, 2] = [1, 3]$ 。

研究表明, 可以采用以下方法来改善区间计算结果: (1) 变换运算次序使功能函数中每个区间变量出现的次数尽可能减少; (2) 利用次分配律尽量先加减后乘除, 例如 $g(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$, 可按 $g(x) = \{\cdots[(a_0 x + a_1)]x + \cdots + a_{m-1}\}x + a_m$ 进行计算。但是功能函数为一有理函数时, 什么样的运算次序最佳, 还有待于解决^[8]。

笔者认为, 区间扩张缺陷的存在来源于区间数运算法则的定义。研究发现, 可以采用区间数学的思想建立区间计算模型, 但是对区间模型进行求解时不直接采用通常定义的区间运算法则, 而是根据所要表达问题的实际物理意义和区间数学的单项包含性质, 转化为分别求各变量的最大值和最小值全局优化问题, 来避免区间模型计算结果易于扩张问题^[10]。

为此, 本文把结构区间功能函数 $[M] = [\underline{M}, \bar{M}] = [R] - [S] = g([x]) = g([x_1], [x_2], \cdots, [x_n])$

的计算转化为采用实数编码遗传算法求解两个全局优化问题分别确定功能函数的上限值 $\overline{M}$ 和下限值 $\underline{M}$ 。所采用的实数编码遗传算法采用比例选择、算术交叉、非均匀变异和边界变异、最优个体保护策略等遗传操作, 具体可参见文[10-11]。

5 算例

例 1 图 1 示悬臂梁受集中载荷 p_1 和 p_2 。 $p_1 \in [4.4, 5.6]$ kN, $p_2 \in [1.7, 2.3]$ kN, $l_1 \in [1.8, 2.2]$ m, $l_2 \in [4.5, 5.5]$ m。试分别在如下(1)、(2)、(3)等情况下对该梁的安全性能进行评估。

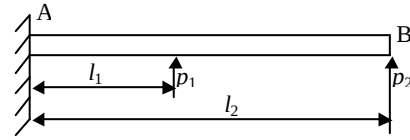


图 1 悬臂梁

(1) 当 $|m_{\max}| \geq m_{cr}$ 时失效。 m_{cr} 为临界极限弯矩,

$m_{\max}$ 为梁中弯矩最大值, $m_{cr} \in [32, 40]$ kN·m。 (2) 梁横截面为矩形 (宽×高= $b \times h$), 当 $s_{\max} \geq s_{cr}$ 时梁失效。 s_{cr} 为临界极限弯矩, $s_{\max}$ 为梁中拉应力最大值。 $b \in [0.18, 0.22]$ m, $h \in [0.28, 0.32]$ m, $s_{cr} \in [11, 12] \times 10^6$ Pa。 (3) 横截面为矩形, 宽 b 、高 h 同(2), 要求自由段挠度 $f_B \leq f_{cr} = 5 \times 10^{-3}$ m, 试确定悬臂梁材料弹性模量。

解: (1) 功能函数 $[M] = [R] - [S]$, 其中 $[R] = [m_{cr}] = [32, 40]$ kN·m, $[S] = [p_1][l_1] + [p_2][l_2] = [15.57, 24.97]$ 。所以 $[M] = [R] - [S] = [7.03, 24.43]$ kN·m $= [15.73; 8.7]$ kN·m > 0 , 安全。可靠度指标为 $h = m([M]) / \text{rad}([M]) = 15.73/8.7 = 1.808$ 。

(2) 功能函数 $[M] = [R] - [S]$, 其中 $[R] = [s_{cr}] = [11, 12] \times 10^6$ Pa, $[S] = [s_{\max}] = ([p_1][l_1] + [p_2][l_2]) / ([b][h]^2 / 6) = [4.147, 10.616]$ MPa。所以 $[M] = [R] - [S] = [0.384, 7.853]$ MPa $= [4.1185; 3.7345]$ MPa > 0 , 安全。可靠度指标为 $h = m([M]) / \text{rad}([M]) = 4.1185/3.7345 = 1.1028$ 。

(3) 功能函数为 $[M] = [R] - [S] = f_{cr} - [f_B] \geq 0$, $[f_B] = (3[p_1][l_1]^2[l_2] - [p_1][l_1]^3 + 2[p_2][l_2]^3) / ([E][b][h]^2 / 2)$, 得 $[E] \geq (3[p_1][l_1]^2[l_2] - [p_1][l_1]^3 + 2[p_2][l_2]^3) / (f_{cr}[b][h]^2 / 2)$ 。采用遗传算法求得 $(3[p_1][l_1]^2[l_2] - [p_1][l_1]^3 + 2[p_2][l_2]^3) / (f_{cr}[b][h]^2 / 2) = [8.4628, 32.6790]$ GPa, 所以要求 $E \geq 32.679$ GPa。

例 2 图 2 示超静定桁架, AB、BC、CD、DA 四杆断面积相同为 $A_1 \in [0.44, 0.46] \times 10^{-4}$ m², 斜杆 AC 和 BD 的断面积为 $A_2 \in [0.46, 0.48] \times 10^{-4}$ m², 长度 $l = 0.1$ m, 许用应力为 $\overline{s} = 200$ MPa, $\underline{s} = -150$ MPa。确定使各杆均为应力安全的外荷载 P 范围。

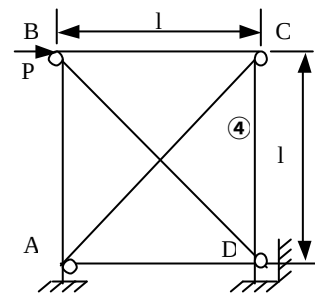


图 2 6杆桁架

解: (1) 由力法求出各杆的内力为:

$S_{BC} = -P(A_2 + 2\sqrt{2}A_1) / (4\sqrt{2}A_1 + 4A_2)$, $S_{CD} = S_{AD} = S_{BC}$, $S_{AB} = S_{BC} + P$, $S_{BD} = -\sqrt{2}(S_{BC} + P)$, $S_{AC} = -\sqrt{2}S_{BC}$ 。根据安全的临界状态 $h = 1$, 即 $\underline{M} = 0$, 对每个杆件, 分别用 2 个功能函数 $[M_1] = [R_1] - [S_1]$ 和 $[M_2] = [R_2] - [S_2]$ 的临界状态 $\underline{M}_1 = \min(R_1 - S_1) = \overline{s} - \max(s) = 0$ 和 $\underline{M}_2 = \min(R_2 - S_2) = -\underline{s} + \min(s) = 0$ 来确定该杆件应力安全时外的外载荷的范围, 结果如表 1 示。

表 1 单独考虑各杆应力安全时的外载荷范围

杆件	外载荷 P 范围 /N
BC	[-22349.75, 16762.31]
AB	[-10839.79, 14453.04]
BD	[-10730.35, 8047.76]
AC	[-12306.92, 16409.22]

从表 1, 进一步可得同时使各杆均为应力安全的外荷载 P 范围是 $[-10730.35, 8047.75]$, 即 $-10730.35 \leq P \leq 8047.75$ 。

6 结语

本文仅是对区间可靠度分析方法的初步研究。采用区间数描述不确定结构参数, 基于区间不等式的概念等区间数学内容, 探讨了一种新的可靠性度量方法, 并提出采用一种避免直接采用区间数运算法则计算结果易于扩张的区间功能函数的计算方法, 从而把非确定性的可靠性分析问题完全转化为确定性的优化问题进行求解。当非确定量的概率分布或隶属度函数无法准确得到时, 本文方法为相应的可靠性分析和设计提供了一种可供选择的可靠方法。

参 考 文 献

- [1]. Sexmith R G. Probability-based safety analysis — Value and drawbacks. Structural Safety, 1999, 21:303-310.
- [2]. 张恒奇. 机械可靠性的灰色系统判别. 机械工程学报, 1992, 28(5): 102-108.
- [3]. 肖芳淳, 张修培. 灰色可靠性分析及其应用的研究. 强度与环境, 2001, (1): 38-42.
- [4]. Ben-Haim Y. A non-probabilistic concept of reliability. Structural Safety, 1994, 14(4): 227- 245.
- [5]. Elishakoff I. Discussion on: a non-probabilistic concept of reliability. Structural Safety, 1995, 17(3): 195-199.
- [6]. Ben-Haim Y. A non-probabilistic measure of reliability of linear systems based on expansion of convex models. Structural Safety, 1995, 17(2): 91-109.
- [7]. 郭书祥, 吕震宙, 冯元生. 基于区间分析的结构非概率可靠性模型. 计算力学学报, 2001, 18(1): 56-60.
- [8]. 李庆扬, 莫孜中, 祁力群. 非线性方程组的数值解法. 北京: 科学出版社, 1999.
- [9]. Alefeld G, Claudio D. The basic properties of interval arithmetic, its software realizations and some applications. Computers and Structures, 1998, 67:3-8.
- [10]. 王登刚, 李杰. 计算不确定结构系统静态响应的一种可靠方法. 计算力学学报. (录用)
- [11]. Michalewicz Z. Genetic Algorithm+Data Structures=Evolution Programs. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. 1992, 1994, 1996

Interval method for structural reliability analysis

Wang Denggang, Li Jie

(Department of Building Engineering, Tongji University, Shanghai, 200092, China)

Abstract The imprecision or uncertainty present in many engineering problem can be modeled using probabilistic, fuzzy, or interval methods. By representing the uncertain structural parameters as interval numbers, a new measure and analysis methodology for structural reliability computation is put forward in this paper, which is based on the theories of interval mathematics. The priori probability density function or subjective function of the structural parameters is not needed in this methodology. So it is more suitable than probabilistic and fuzzy approach when there is no sufficient experimental data to obtain these functions. Overestimation is a major

drawback in interval computations. In order to overcome this drawback, the structural functional function was calculated by using of two optimization problems to obtain its' lower and upper bounds respectively. Moreover, an intellectual algorithm named as real-code genetic algorithm was introduced to locate the global optima of the two optimization problems. Examples show that the presented method is feasible and efficient.

Key words structural reliability; interval analysis; interval mathematics; genetic algorithms; non-probabilistic

[作者简介]

王登刚, 男, 1970 年生。2001 年在大连理工大学获工程力学博士学位, 现在同济大学土木工程博士后流动站工作。

李 杰, 男, 1957 年生。1988 年在同济大学获工学博士学位, 现为同济大学建筑工程系教授, 博士生导师。

《CIMS 论文的天地》声明

本站免费向大家提供论文全文, 本站论文除了特别说明的以外都是从作者手中征集得到的。如果您有论文希望上网, 本站可以免费提供论文全文的上网服务。 也欢迎您向有关人士推荐我站!

目前网上论文网站较多, 有人非法转载本站论文, 在此提出警告, 本站将对这类行为进行追究。

本站镜像:

- 1、上海付费空间镜像: <http://www.cimspaper.com> <主站, 推荐访问>
- 2、教育网内的镜像: <http://xcchen.yeah.net>
- 3、山东泰安网页吧镜像: <http://cimspaper.wy8.net>
- 4、北京虎翼网镜像: <http://cimspaper.51.net>
- 5、广东阳江中联科技: <http://cimspaper.icpcn.com>

欢迎您参加我站提供的邮件列表 希网提供的列表 分类首页/科学.技术/另类科学

<http://www.cn99.com/cgi-bin/catalog?viewcat=58>

为您提供《CIMS 论文的天地》更新通知, 以及有关的论文和学术信息, 每月至少发送一次。本站有机械制造及自动化、计算机集成制造系统(CIMS)方面的学术论文全文, 也有有关学科的学术论文。