

压弯耦合效应下自锚式悬索桥自由振动研究

刘春城^{1,2}, 张哲¹, 石磊¹

(1. 大连理工大学 桥梁研究所, 辽宁 大连 116023, E-mail: liu_chuncheng888@163.com;

2. 北华大学 交通建筑学院, 吉林 吉林 132013)

摘 要: 基于大位移非线性弹性理论的广义变分原理, 考虑了加劲梁的压弯耦合和剪切应变能的影响, 建立了三跨自锚式悬索桥空间耦合自由振动的大位移不完全广义势能泛函, 通过约束变分导出了自锚式悬索桥的竖向挠曲振动、横向挠曲振动和纵向振动的基础微分方程, 忽略非线性项的影响, 进而得到线性振动微分方程。以一座拟建的自锚式混凝土悬索桥为例, 求出了竖向振动方程自振频率的解析解, 并与数值解作了比较, 证明了这一理论和方法为自锚式悬索桥的固有振动特性分析能提供可靠的依据。

关键词: 自锚式悬索桥; 压弯耦合; 自由振动

中图分类号: U442.55

文献标识码: A

文章编号: 0367-6234(2004)01-0109-03

Free vibration analysis of self-anchored suspension bridges
subjected to axial and flexural action effectLIU Chun-cheng^{1,2}, ZHANG Zhe¹, SHI Lei¹

(1. Bridge Institute, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China, E-mail: liu_chuncheng888@163.com;

2. School of Transportation and Architecture, Beihua University, Jilin 132013, China)

Abstract: Based on the generalized potential energy variational principle of nonlinear elasticity theory with large deflection, the incomplete generalized potential energy functional is established on the space coupling free vibration of three-span self-anchored suspension bridge by considering the effect of coupling of flexural and axial action, and shearing strain energy of stiffening girder. By constraint variation, the differential equations of vertical vibration, lateral vibration and longitudinal vibration have been derived. With the nonlinear items disregarded, the linear differential equations are established. A self-anchored suspension bridge being constructed is taken as an example for the solution of frequency of linear vertical vibration, and the results are verified by comparing then with those obtained using the numerical methods, and theoretical basis is therefore provided for the analysis of free vibration of self-anchored suspension bridges.

Key words: self-anchored suspension bridge; coupling of flexural and axial action; free vibration

悬索桥的固有振动特性的研究是悬索桥抗风、抗震及车辆活载所致的振动效应研究基础^[1], 近年来自锚式悬索桥以其优美的线型和错落有致的外观以及选址灵活等特点而越来越受到青睐, 对于地锚式悬索桥空间自由振动的解析理论研究已日趋成熟。国内外学者^[2~5]等已发表了相关的论著。混凝土自锚式悬索桥在国内仅有一

例——大连金石滩滨海路桥, 相继有几座跨径较大的自锚式混凝土悬索桥即将修建, 而对此全面系统地研究也非常少见。自锚式悬索桥的空间自由振动也类似于地锚式悬索桥, 存在竖向、横向、扭转及纵向振动的耦合。自锚式悬索桥由于主缆锚固在梁端, 加劲梁承受巨大的主缆传来的轴向压力, 同时结构处于大变形工作状态, 加劲梁存在压弯耦合和轴向压缩应变能, 这一结构受力状态, 使其自由振动区别于地锚式结构, 存在着自身特点。因此, 对其动力特性研究有着非常重要的意义。

收稿日期: 2002-11-05.

作者简介: 刘春城(1969-), 男, 副教授, 博士研究生;

张哲(1944-), 男, 教授, 博士生导师。

1 大位移不完全广义势能泛函的建立

以三跨自锚式悬索桥为例,根据自锚式悬索桥的结构特点,引入如下假定^[5]:

1)所有的材料符合虎克定律;2)成桥状态下,恒载沿跨度均匀分布,缆索为抛物线型;3)加劲梁为在塔架处有竖向支撑的等截面连续梁,考虑加劲梁的竖曲线及拱度;4)吊杆是稠密的,可以比拟为仅在竖向有抗力的均匀膜,不计吊杆的拉伸;5)不考虑塔的顺桥向抗弯刚度及轴向压缩变形,横桥向刚度为无穷大.

任取一微段加劲梁单元,只考虑压缩和弯曲变形,即压、弯耦合,忽略剪切变形,见图 1、2.

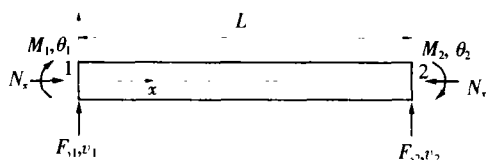


图 1 加劲梁单元荷载分布

Fig. 1 Distribution of element loads in stiffening girder

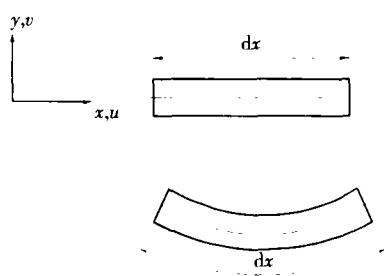


图 2 加劲梁微单元变形

Fig. 2 Element deformation of stiffening girder

轴向应变可表达为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2. \quad (1)$$

那么,这段加劲梁的应变能可表示为

$$U^e = \frac{1}{2} \int_0^L E \varepsilon_x^2 dv. \quad (2)$$

将式(1)代入式(2),注意到

$$\int_{A_s} dA = A_s, \int_{A_s} y dA = 0, \int_{A_s} y^2 dA = I_s.$$

同时忽略高阶小量,式(2)进一步可表达为

$$U^e = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + EI_s \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + N_x \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx.$$

若记缆索和加劲梁的应变能分别为 U_{ce} 和 U_{se} ,重力势能为 V_g ,动能为 T ,则悬索桥空间耦合振动问题的大位移不完全广义势能为^[5,6]

$$\Pi^* = \int_{t_1}^{t_2} \left(T - U_{ce} - U_{se} - V_g - \sum_{i=1}^2 \int_0^{L_i} \lambda_i f_i dx_i - \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \lambda_r f_r dx_i \right) dt.$$

式中: λ_i, λ_r 为 Lagrange 乘子; f_i, f_r 为左侧和右侧吊杆无延伸约束条件.

2 自由振动微分方程的建立

将泛函 Π^* 分别对 $u, v, w, \dots$ 变分^[6],得关于未知量 $u, v, w, \dots$ 的欧拉方程为

$$\delta \Pi^* = \frac{\partial \Pi^*}{\partial \phi_i} \delta \phi_i = 0, \quad \phi_i = u, v, w, \theta, \dots$$

则加劲梁的竖向振动方程为

$$\begin{aligned} & \frac{q_s}{g} \ddot{v} + \frac{q_c}{2g} (\ddot{v}_l + \ddot{v}_r) - \frac{q_s}{g A_s} I_s \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + EI_s \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \\ & \frac{H_q}{2} \left(\frac{\partial^2 v_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \right) + (H_l + H_r) \frac{q_c}{H_q} + N_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \\ & H_l \frac{\partial^2 v_l}{\partial x^2} - H_r \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} - \mu G A_s \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \mu G A_s \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

加劲梁横向振动方程为

$$\begin{aligned} & \frac{q_s}{g} \ddot{w} - \frac{q_s}{g A_s} I_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{(w - d_h \theta - w_l)}{h} \cdot \\ & \left[\frac{q_c}{2g} \left(\ddot{v} + \frac{b}{2} \ddot{\theta} \right) + \left(\frac{1}{2} H_q + H_l \right) \frac{q}{H_q} - \left(\frac{1}{2} H_q + H_l \right) \cdot \right. \\ & \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(v + \frac{b \theta}{2} \right) - \frac{q_c}{2} \right] + \frac{(w - d_h \theta - w_r)}{h} \cdot \\ & \left[\frac{q_c}{2g} \left(\ddot{v} - \frac{b}{2} \ddot{\theta} \right) + \left(\frac{1}{2} H_q + H_r \right) \frac{q}{H_q} - \left(\frac{1}{2} H_q + H_r \right) \cdot \right. \\ & \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(v - \frac{b \theta}{2} \right) - \frac{q_c}{2} \right] - \mu G A_s \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu G A_s \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

加劲梁纵向振动方程为

$$\begin{aligned} & \frac{q_s}{g} \ddot{u} - EA_s \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu G A_s \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

式中: g 为重力加速度; q_s, q_c 分别为加劲梁和缆索的恒载集度; A_s, I_y 和 I_z 分别为加劲梁的截面积,侧向和竖向惯性矩; $H_l(t), H_r(t)$ 表示由惯性力引起的左、右两侧缆索水平缆力增量; q 为总荷载集度; H_q 为两缆恒载水平力.

3 方程的简化及求解

将式(3)~(5)中的非线性项略去,则加劲梁的横向振动方程与地锚式悬索桥完全相同,只是边界条件不同而已;加劲梁的纵向振动方程与文献[7]中杆的纵振方程相同,其经典解析解见文献[7];注意到 $N_x = H_q$,竖向振动方程简化为

$$\frac{q_s}{g} \ddot{v} + EI_s \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{q}{H_q} H_v = 0. \quad (6)$$

设 $v(x,t) = \bar{v}(x)e^{i\omega t}$, $H_v(t) = \bar{H}_v e^{i\omega t}$, 代入竖向振动方程(6)中, ω 为自振圆频率, $\bar{v}(x)$ 为相应的振型。 H_v 为两缆力之和, 设 E_c, A_c 分别为主缆的弹性模量和两缆面积之和, 则 H_v 可表达为

$$H_v = \frac{E_c A_c}{L_c} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{q}{H_q} \int_0^{L_i} v_i dx_i \right).$$

那么方程式(6)简化为一个 4 阶常系数非齐次常微分方程 $EI_z \frac{d^4 \bar{v}(x)}{dx^4} - \frac{q\omega^2}{g} \bar{v}(x) + \frac{q}{H_q} \bar{H}_v = 0$.

因此, 式(6)的解为 $v(x,t) = (C_1 \text{ch } \lambda x + C_2 \text{sh } \lambda x + C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x + g \bar{H}_v / \omega^2 H_q) \sin(\omega t + \psi)$.

式中: $\lambda = \sqrt{(q\omega^2)/(EI_z g)}$; $H_q = qL^2/8f$ (或 $qL_1^2/8f_1$); $\bar{H}_v$ 为附加缆力。 $C_1 \sim C_4, \psi$ 为待定常数, 由初始边界条件确定。

某桥为一混凝土自锚式悬索桥, 加劲梁采用钢筋混凝土箱梁。主桥全长 420 m, 主跨 240 m, 边跨分别为 90 m, 失跨比为 1/7, 锚固区长度 12.5 m。采用三维空间脊梁模式建立其动力有限元分析模型(见图 3)。将结构划分为 574 个空间单元, 其中塔柱、塔墩、主梁、横梁采用梁单元, 主缆、吊杆采用缆索单元, 考虑了主缆和吊索初应力的影响。其竖向自由振动的计算结果见表 1。

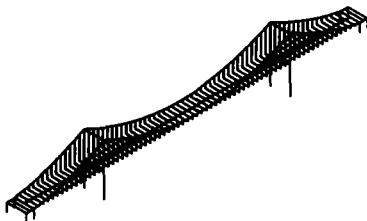


图 3 自锚式悬索桥有限元模型

Fig. 3 Finite element model of self-anchored suspension bridge

表 1 解析解与数值解计算结果

Tab. 1 Theoretical and numerical results

跨 别	振 型	固 有 频 率 ω / Hz		
		解析解	DDJ - W	ANSYS
主 跨	一阶对称	0.341 9	0.371 3	0.392 6
	一阶反对称	0.684 8	0.723 7	0.745 8
边 跨	一阶对称	1.796 3	1.885 2	1.917 6
	一阶反对称	1.693 2	1.744 9	1.783 8

4 结 论

1) 所有振动微分方程均为非线性方程。忽略非线性项的影响, 竖向挠曲振动将不与横向挠曲振动耦合; 若忽略加劲梁剪切应变能的影响, 竖向挠曲振动将不与纵向振动出现耦合, 但横向挠曲

振动将和扭转振动始终出现耦合; 由于考虑加劲梁纵向位移的影响, 加劲梁的横向振动将与纵向振动及扭转振动出现耦合; 当考虑加劲梁剪切应变能的影响时, 加劲梁的纵向振动将与竖向挠曲振动和横向挠曲振动出现耦合。

2) 在竖向振动方程中, 自锚式悬索桥与地锚式悬索桥相比由于压弯耦合项的存在, 抵消了主缆的恒载水平力项, 方程可进一步的简化。解析解与数值解基本吻合。

参考文献:

[1] 李国豪. 桥梁结构稳定与振动[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1992.
[2] 小西一郎. 刚桥⑤[M]. 戴振藩译. 北京: 中国铁道出版社, 1981.
[3] ABDEL - GHAFAR A M. Suspension bridge vibration. Continuum formulation[J]. Journal of the Engineering Mechanics, 1982, 108(6): 1215 - 1236.
[4] ABDEL - GHAFAR A M. Free lateral vibrations of suspension bridges[J]. Journal of Structure Engineering, 1978, 104(3): 503 - 525.
[5] 陈仁福. 大跨度悬索桥理论[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 1994.
[6] 钱伟长. 变分法及有限元[M]. 北京: 科学出版社, 1980.
[7] 孙焕纯, 曲乃泗, 林家浩. 计算结构动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1989. (编辑 姚向红)

中德合作再谱新篇

黑辛格教授受聘我校名誉教授

9月19日, 德国宇航中心机器人与机电一体化研究所所长黑辛格教授受聘为我校名誉教授。王树国校长向黑辛格教授颁发了聘书, 并希望黑辛格教授发挥他的智慧和国际影响, 对哈工大机器人的发展给予更多指导, 共同推动中国机器人事业的发展。

聘请仪式上, 黑辛格教授与蔡鹤皋教授分别代表德国宇航中心机器人与机电一体化研究所与哈工大机器人研究所在《HIT - DLR 进一步合作协议书》上签字, 双方就推进 HIT - DLR 联合机器人研究室科学研究水平、在 2004 年 6 月德国慕尼黑第一届国际机器人及自动化展览会上联合展示 HIT - DLR 机器人灵巧手以及共同参与国际空间探索计划等合作领域的具体事宜达成进一步共识。

黑辛格教授在短短 1 天的访问中, 参观了哈工大校区、校史馆以及机器人研究所, 并为全校师生作了《从太空到医学的新一代机器人》和《21 世纪太空机器人》两场精彩的学术报告。

黑辛格教授是国际著名的机器人专家, IEEE“机器人及自动化”管理委员会委员, 国际机器人学会欧洲代表, 多次任国际学术活动的执行主席、委员会成员或特邀报告人等。